8. ПРИМЕР: ПАДЕНИЕ ТЕЛА С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Точка массы m падает на Землю из состояния покоя под действием постоянной силы тяжести. Найти скорость и закон движения точки, если сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ($R = k^2 m v^2$, где k — постоянная).

$$m\ddot{x} = mg - mk^2 x^2 \qquad \dot{v} = g - k^2 v^2 \qquad \frac{dv}{g - k^2 v^2} = dt \qquad \frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv}{\sqrt{g} - kv} = t + C_1$$

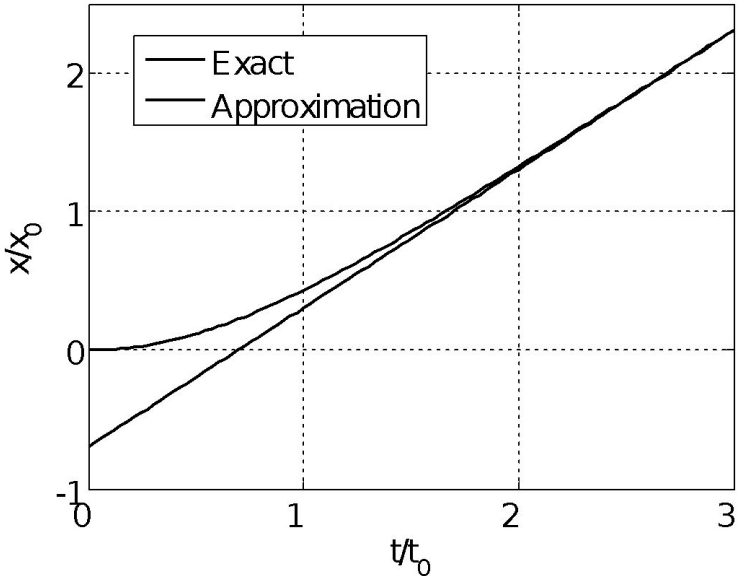
$v(0) = 0$

$$dx = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{2k\sqrt{g}t} - 1}{e^{2k\sqrt{g}t} + 1} dt = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{k\sqrt{g}t} - e^{-k\sqrt{g}t}}{e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}} dt = \frac{1}{k^2} \frac{d\left(e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}\right)}{e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}}$$

$$x = \frac{1}{k^2} \ln\left(e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}\right) + C_2$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln 2$$

$$\frac{x}{x_0} = \ln\left(\frac{e^{t/t_0} + e^{-t/t_0}}{2}\right) \qquad x_0 = \frac{1}{k^2}, \quad t_0 = \frac{1}{k\sqrt{g}}$$

Приближенное решение

$$t \gg t_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{g}}{k} t - \frac{\ln 2}{k^2}$$