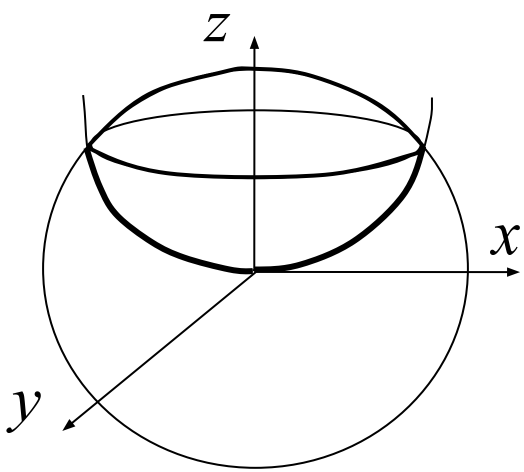
Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\,dv$ по области, ограниченной поверхностями

$$V:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$



Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ J = r.$$

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \to z = r^2.$$

Уравнение сферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \to z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей является окружность радиуса $r = \sqrt{2}$ $\left(r^2 + r^4 = 6\right)$.

Переменные изменяются в следующих пределах:

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I = \iiint\limits_V z\,dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - r^2 - r^4\right) r\,dr = \frac{11}{3}\pi.$$