Геометрическая интерпретация двойного интеграла

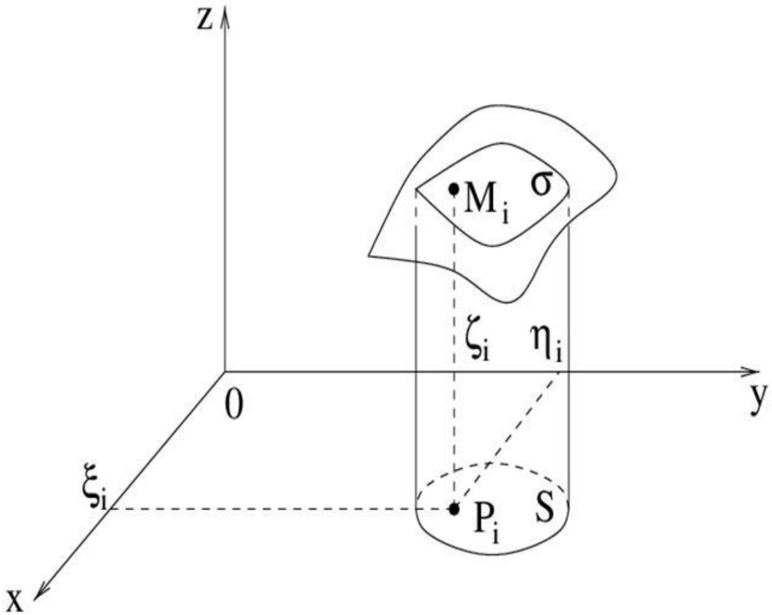

Рис. 60. *Геометрическая интерпретация двойного интеграла*

Пусть теперь $z = f(x, y) \geqslant 0$ в области S. Обозначим буквой σ часть поверхности определяемой уравнением $z = f(x, y)$, проекция которой на плоскость Oxy равна S (рис. 60). А точка $P_i \in \Delta S_i$ будет являться проекцией точки $M_i \in \sigma$ на плоскость Oxy.

Так как $\zeta_i = f(\xi_i; \eta_i) = P_i M_i$, то произведение $f(\xi_i; \eta_i)\Delta S_i = \zeta_i \Delta S_i$ есть объём малого цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $P_i M_i = \zeta_i$.

Интегральная сумма $\sum\limits_{n=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i)\Delta S_i = \sum\limits_{n=1}^{n} \zeta_i \Delta S_i$ будет равна объёму некоторого «ступенчатого» тела V_n, состоящего из этих цилиндриков.

В соответствие с формулой 51.1 имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_S f(x, y)ds = \lim_{n\to+\infty} V_n = V,$$