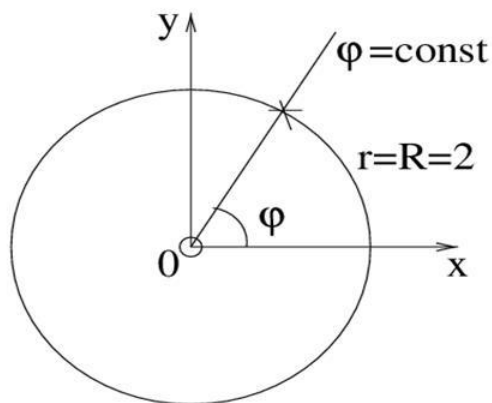


ПРИМЕР 53.1. Вычислить двойной интеграл $\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds$ по области, являющейся кругом радиуса $R = 2$.



Так как в полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad ds = r dr d\varphi$$

$$\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds = \iint_S \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi$$

Область интегрирования ограничена следующим значением r и φ : $r = 0, r = 2, \varphi = 0, \varphi = 2\pi$. Следовательно,

$$\iint_S \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} r dr$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \quad \text{и} \quad \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} r dr = - \left(\frac{\sqrt{(4 - r^2)^3}}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Следовательно, окончательный ответ $\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds = \frac{16\pi}{3}$.