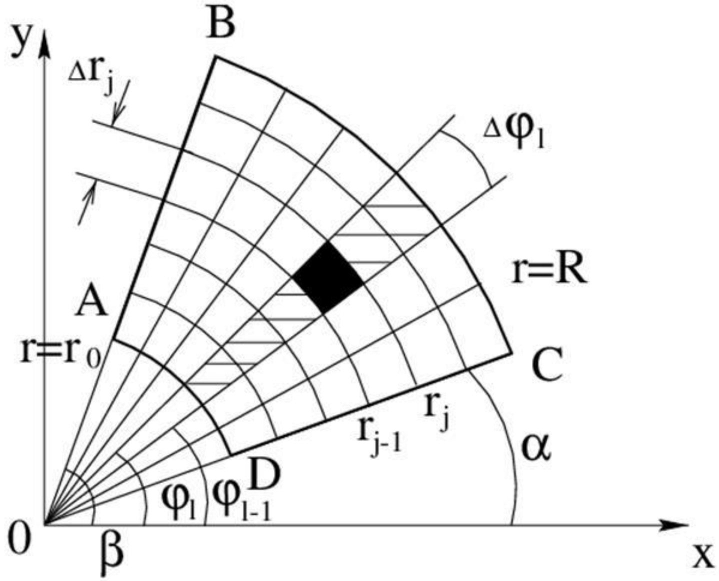
Двойной интеграл в полярных координатах



$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r_j^2 \Delta\varphi_l - \frac{1}{2} r_{j-1}^2 \Delta\varphi_l = \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2}\Delta\varphi_l =$$

$$= \frac{r_j + r_{j-1}}{2}(r_j - r_{j-1})\Delta\varphi_l = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}\Delta r_j \Delta\varphi_l$$

$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\frac{r_j + r_{j-1}}{2}\Delta r_j \Delta\varphi_l$$

тогда $\iint\limits_S f(x,y)ds = \iint\limits_S f(x,y) r dr d\varphi$ и, учитывая, что $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$

$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \iint\limits_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi. \qquad (53.1)$$

Определение 53.1. *Выражение $rdrd\varphi$ называется элементом площади в полярных координатах.*