Лабораторная работа 5.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖЕНИЯ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОСЦИЛЛОГРАФА

Цель работы

1. Ознакомление с помощью осциллографа с видом траектории точки, участвующей в двух колебательных движениях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.
2. Градуировка генератора с помощью фигур Лиссажу.
3. Определение амплитуд и разности фаз двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по разделу "Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний" по [I, с. 201-204] .

Если материальная точка совершает два независимых друг от друга колебания во взаимно перпендикулярных направлениях

$$x = x_0 \cos\omega_x t\ , \qquad (I)$$

$$y = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi), \qquad (2)$$

то результирующее движение точки – движение по некоторой сложной траектории в плоскости x , y , форма которой зависит от амплитуд x_0 , y_0 , соотношения частот обоих колебаний ω_x , ω_y , а также разности фаз φ . Траектория заключена в прямоугольнике $-x_0 \le x \le x_0$, $-y_0 \le y \le y_0$. При произвольном соотношении частот ω_x и ω_y траектория, вообще говоря, получается незамкнутой. Однако, если частоты ω_x и ω_y соизмеримы, т.е. если они могут быть представлены как отношение двух целых чисел $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}$, то траектория оказывается замкнутой. (Подумайте: почему и через какое время траектория замкнется сама на себя?).

Самый простой вид траектории получается, когда частоты обоих колебаний одинаковы $\omega_x = \omega_y = \omega$. Для установления вида траектории необходимо из системы уравнений (I) и (2) исключить время t. Это просто сделать, если вспомнить следующие формулы тригонометрии

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi\ ,$$

$$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1\ .$$

После несложных преобразований (сделайте их самостоятельно), получим уравнение траектории:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2\frac{x \cdot y}{x_0 y_0}\cos\varphi = \sin^2\varphi\ . \qquad (3)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса, оси которого ориентированы некоторым образом относительно координатных осей x и y . Ориентация эллипса и величины его полуосей зависят от амплитуд x_0 и y_0 и от разности фаз φ .

Рассмотрим следующие частные случаи.

I. Разность фаз $\varphi = 0$. Тогда (3) принимает вид

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} \qquad (4)$$

– уравнение прямой, проходящей через первый и третий квадранты (рис.I). Точка перемещается по прямой, причем расстояние ее от начала координат, очевидно, равно $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя сюда выражения для x и y из (I) и (2), получаем закон, по которому r меняется со временем при $\varphi = 0$:

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos\omega t\ . \qquad (5)$$

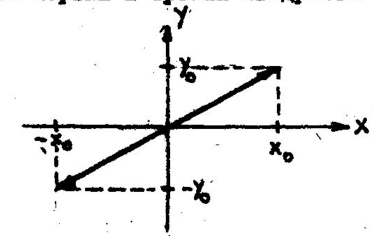

Рис.I

Видно, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с циклической частотой ω и амплитудой $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

2. Разность фаз $\varphi = \pm\pi$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0\ ,$$

откуда следует, что результирующее движение представляет собой колебание вдоль прямой

$$\frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0}\ , \qquad (6)$$

проходящей во втором и четвертом квадрантах (рис.2).

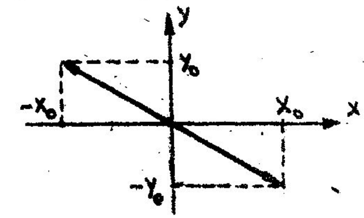

Рис.2

3. Разность фаз $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1 \qquad (7)$$

– уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны x_0 и y_0 . При равенстве амплитуд x_0 и y_0 эллипс вырождается в окружность. Случаи $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлением движения по эллипсу (или по окружности). При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ уравнения (I) и (2) имеют вид

$$x = x_0\cos\omega t\ , \quad y = -y_0\sin\omega t\ .$$

Установим направление движения. В момент времени $t = 0$ точка